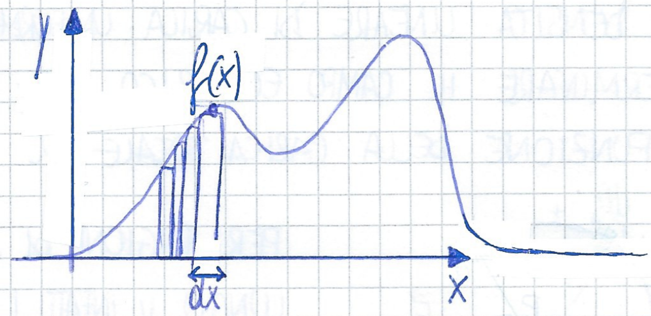
SOLUZIONI Ex. 4 I ESERCITAZIONE

Premessa - Gli integrali lungo una linea

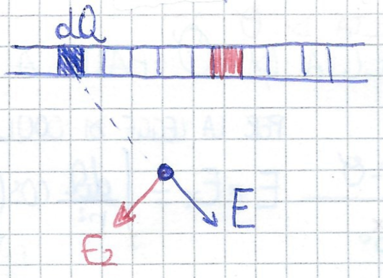
L'INTEGRALE INDICA UNA SOMMATORIA SU UNA VARIAB. CONTINUA

PER ESEMPIO NEGLI INTEGRALI DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE QUELLO CHE SI STA FACENDO È LA SOMMA DI AREE DI RETTANGOLI (SOTTILI)

$$\underbrace{\int}_{\text{SOMME SU TUTTI I RETTANGOLI}} \underbrace{\overset{\text{ALTEZZA}}{f(x)} \cdot \overset{\text{LATO DEL RETTANGOLO}}{dx}}_{\text{AREA DI UN RETTANGOLO}}$$



QUANDO SI HA UNA DISTRIBUZIONE DI CARICA LINEARE, SI PUÒ CALCOLARE IL CAMPO ELETTRICO PENSANDO CHE CIASCUN "BLOCCHETTO" DI CARICA CONTRIBUISCA SECONDO LA LEGGE DI COULOMB (PER ESEMPIO IL CAMPO GENERATO DAL BLOCCHETTINO BLU È)



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \hat{r}$$ dove dQ indica che è un blocchetto piccolo, infinitesimo di carica

A QUESTO PUNTO DEVO SOMMARE, SECONDO IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE, TUTTI I CAMPI DI CIASCUN BLOCCHETTO. I BLOCCHETTI SONO INFINITI QUINDI HO UN INTEGRALE

$$\vec{E} = \vec{E}_{1 BLOCCH.} + \vec{E}_{2 BLOCCH.} + \dots \quad \text{cioè}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dQ}{r^2} \hat{r}$$

PER CALCOLARE dQ SUPPONIAMO DI AVERE UNA DENSITÀ LINEARE DI CARICA UNIFORME LUNGO IL FILO/ASTA

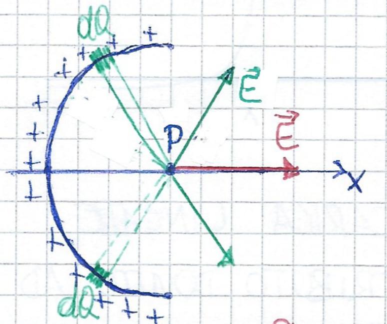
$$\lambda = \frac{Q_{TOT}}{L}$$ SI AVRÀ ALLORA $dQ = \lambda\, dl$ e $\int_0^L \frac{Q}{L} \frac{dl}{r^2} \hat{r}$

L lunghezza dell'asta $\qquad$ dl lunghezza del "blocchetto"

IN GENERALE L'INTEGRALE SCRITTO NELLA PAGINA PRECEDENTE È CALCOLABILE ANALITICAMENTE SE ABBIAMO UN SISTEMA CON UNA SIMMETRIA SUFFICIENTEMENTE ALTA DA PERMETTERE DI EVITARE IL CALCOLO DELLA SOMMA VETTORIALE, OVVERO DI RICONOSCERE FIN DA SUBITO LA DIREZIONE DEL CAMPO RISULTANTE.

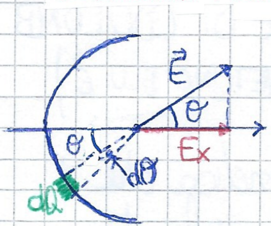
Soluzioni ex. 4 - I esercitazione

LA CARICA Q È DISTRIBUITA LUNGO UNA SEMICIRCONFERENZA DI RAGGIO r CON DENSITÀ DI CARICA LINEARE UNIFORME. IL SISTEMA È RAPPRESENTATO IN FIGURA. DETERMINARE IL CAMPO ELETTRICO NEL CENTRO P DELLA SEMICIRCONFERENZA IN FUNZIONE DELLA CARICA TOTALE Q E DEL RAGGIO r.



PER RAGIONI DI SIMMETRIA IL CAMPO $\vec{E}$ TOTALE È DIRETTO LUNGO x. LUNGO y INFATTI I CONTRIBUTI DOVUTI AI DIVERSI PUNTI DELLA CIRCONFERENZA SI COMPENSANO TRA LORO. (SOMMEREMO QUINDI SOLAMENTE LE COMPONENTI x DEI CAMPI)

CON UNA SCELTA DI θ FORSE PIÙ NATURALE
θ=ANGOLO FRA CAMPO $\vec{E}$ E ASSE X (θ=0 SU ASSE X)



PER LA LEGGE DI COULOMB (VEDERE PAG. PRECED.)

$$E = E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dQ}{r^2}\underbrace{\cos\theta}_{\text{PROIEZIONE VETTORE}}$$

LA DENSITÀ DI CARICA SARÀ $\lambda = \dfrac{Q}{\pi r}$ → LUNGHEZZA SEMICIRCONF.

E LA CARICA $dQ = \underbrace{\lambda\, dl}_{\text{LUNGHEZZA BLOCCHETTO}} = \underbrace{\lambda\, r\, d\theta}_{\text{ARCO = RAGGIO · ANGOLO (rad)}}$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda r \cos\theta}{r^2}\, d\theta$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{Q}{\pi \cancel{r}} \frac{\cancel{r}\cos\theta}{r^2}\, d\theta$$

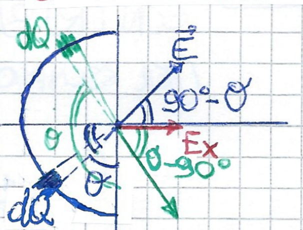
$$E = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0 r^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta$$

DOVE LA SCELTA DEGLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE SEGUE DALLA DEF. DI θ (θ=0 su asse X)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = \sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 1-(-1) = 2$$

$$E = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0 r^2}\cdot 2 = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 r^2}$$

CON LA SCELTA DI θ FATTA A LEZIONE
θ= ANGOLO FRA ASSE y E ELEMENTO dQ (θ=0 SU ASSE y)



PER LA LEGGE DI COULOMB

$$E = E_x = \int \frac{dQ}{r^2}\underbrace{\cos(90°-\theta)}_{\text{PROIEZIONE VETTORE}}$$

LA DENSITÀ DI CARICA SARÀ $\lambda = \dfrac{Q}{\pi r}$

E LA CARICA $dQ = \lambda\, dl = \lambda\, r\, d\theta$

INOLTRE $\cos(\theta-90°) = \cos(90°-\theta) = \operatorname{sen}\theta$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda r \operatorname{sen}\theta}{r^2}\, d\theta$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{Q}{\pi r}\frac{r \operatorname{sen}\theta}{r^2}\, d\theta$$

$$E = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0 r^2}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

DOVE LA SCELTA DEGLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE SEGUE DALLA DEF DI θ (θ=0 su asse y)

$$\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\cos\theta\Big|_0^{\pi} = -(-1)+1 = 2$$

$$E = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0 r^2}\cdot 2 = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 r^2}$$